

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КАТАЛАНА

Беляев П.Л., к.ф.-м.н, доцент

*Бирский филиал ФГБОУ «Башкирский Государственный
Университет»*

Наиболее эффективное восприятие информации человеком происходит, если эта информация представлена в виде изображения. В курсе геометрии изучаются как фигуры на плоскости, так и тела в пространстве. Существует множества различных программных средств, которые легко позволяют получить изображение геометрической фигуры на плоскости. С изображением тел в пространстве с помощью программных средств дело обстоит сложнее. В связи с тем, что нами проводилось детальное изучение поверхностей Каталана, то мы столкнулись с задачей пространственного представления этих поверхностей. Перед нами стояла проблема нахождения такого программного средства, которое было бы несложным и давало возможность наглядного представления поверхности. В результате наших поисков была найдена программа 3D Grapher, к которой имеется бесплатный доступ в интернете, и кроме всего прочего она имеет небольшой объем при довольно хороших возможностях.

3D Grapher это удобная и простая в использовании программа для построения графиков. Она позволяет создавать анимированные 2D и 3D графики уравнений и табличных данных. В одной системе координат может быть неограниченное число графиков, каждый из которых может отображаться при помощи точек, линий и поверхностей. Аналитические функции задаются в параметрическом виде и могут содержать до трех независимых переменных, включая переменную времени для анимации. Графики можно масштабировать, перемещать, вращать и наблюдать под любым углом в реальном времени.

Другие возможности включают отслеживание и вывод координат курсора на плоскости или в трехмерной системе

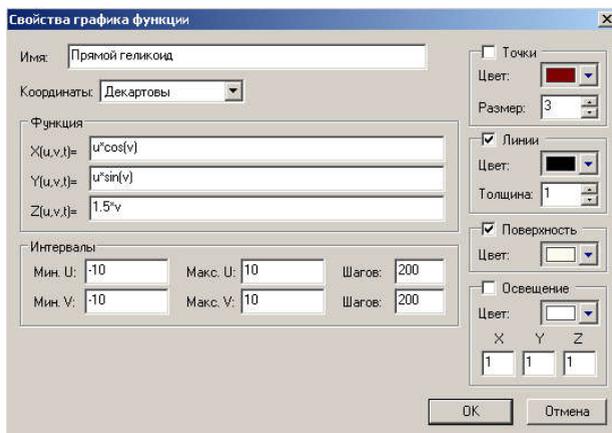
координат, встроенный калькулятор выражений, импорт и экспорт данных в различных форматах. Программа имеет полностью настраиваемый дружественный интерфейс.

В качестве яркого примера поверхности Каталана нами был выбран геликоид. Нами были рассмотрены следующие виды геликоида: прямой, косой и геликоид Дини. Продемонстрируем использование программы 3D Grapher для построения этих поверхностей.

Итак, для построения поверхностей нам будут необходимы их параметрические уравнения. Прямой геликоид имеет следующие параметрические уравнения [3]:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \quad 0 \leq u < \infty, -\infty < v < +\infty, a \neq 0. \\ z = av, \end{cases}$$

Запускаем программу 3D Grapher и в появившемся окне записываем параметрические уравнения при $a=1,5$.



Прямой геликоид, построенный в данной программе имеет следующий вид:

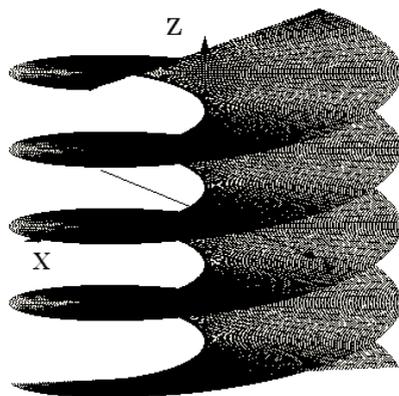


Рис.1

Рассмотрим теперь пространственное изображение косо́го геликоида [2].

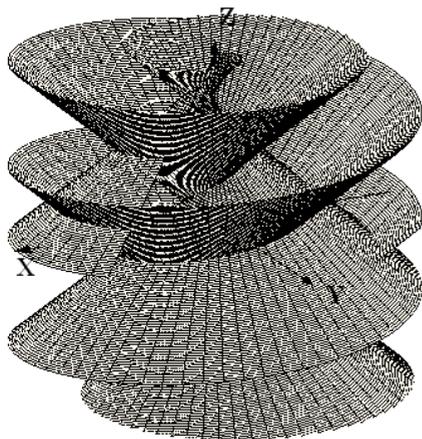


Рис.2.

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = u + v, \end{cases}$$

$$0 \leq u < \infty, -\infty < v < +\infty, a \neq 0$$

Остановимся на геликоиде Дини [2], который имеет следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + bv, \end{cases} \quad 0 \leq u < \infty, -\infty < v < +\infty, a \neq 0, b \neq 0.$$

Рассмотрим изображение геликоида Дини при $a=5, b=2$.

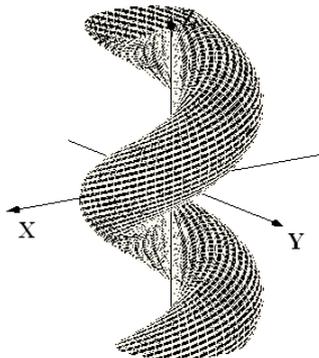


Рис.3

Помимо иллюстрации самих поверхностей, в данной программе можно проиллюстрировать решение конкретных задач дифференциальной геометрии, например следующей задачи.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к прямому геликоиду в точке $P(u=a, v=\frac{\pi}{2})$ в прямоугольной декартовой

системе координат.[1]

Решая эту задачу аналитически, получаем:

$2x + 5z - 5\pi = 0$ - уравнение касательной плоскости;

$n: \begin{cases} y - 5 = 0, \\ 5x - 2z + 2\pi = 0 \end{cases}$ - уравнения нормали.

С помощью программы 3D Grapher проиллюстрируем решение данной задачи.

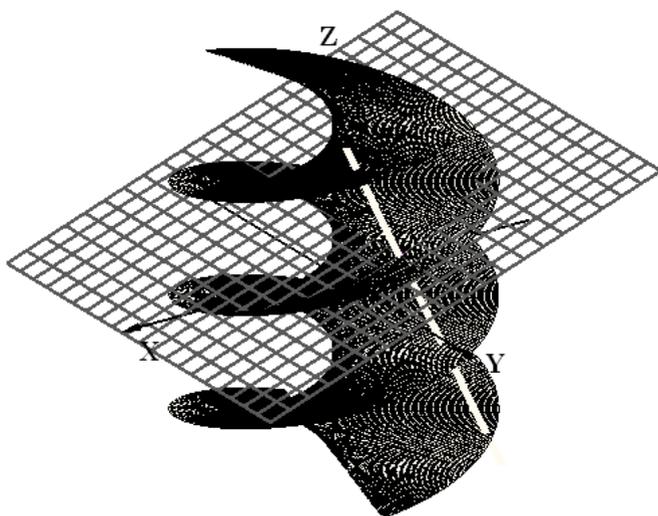


Рис.4

Нашими примерами было продемонстрировано насколько просто можно построить различные поверхности в 3D Grapher и проводить визуализацию решения конкретных задач. Применение этой программы при изучении теории поверхностей позволит повысить эффективность усвоения материала.

Литература

1. Атанасян Л.С. , Гуревич Г.Б. Геометрия, ч.2.-М.: «Просвещение».-1976.-446 с.
2. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. -М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы.-1946.-511 с.
3. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч.1.-М.:ОГИЗ,1947.